Rachunek zdań i
logika matematyczna

Pojęcia

- Logika - Zajmuje się badaniem ogólnych praw, według których przebiegają wszelkie poprawne rozumowania, w szczególności wnioskowania.
- Rachunek zdań - dział logiki matematycznej badający związki między zdaniami (zmiennymi zdaniowymi) lub funkcjami zdaniowymi utworzonymi za pomocą spójników zdaniowych ze zdań lub funkcji zdaniowych prostszych. Rachunek zdań określa sposoby stosowania spójników zdaniowych w poprawnym wnioskowaniu.
- Tautologia – zdanie zawsze prawdziwe (wyrażenie, które jest prawdziwe na mocy swojej formy - budowy)

Uwaga na logikę

Nie wszystko co w sensie logiki jest logiczne jest obiektywną prawdą. Skąd to się bierze:

- Tezy logiki są tautologiami.
- Tezy logiki nic więc nie mówią. (Są one zdaniami analitycznymi.)
- Teorie, które tezie logiki nadają pozór treści, są zawsze błędne.
- Granice mego języka oznaczają granice mego świata.
- Logika wypełnia świat; granice świata są też jej granicami.

Jak więc zweryfikować

- Karl Popper: falsyfikowalność jako kryterium prawdziwości hipotez.

Wyjątek potwierdzxa regułę

- Sens mają zdania weryfikowalne i falsyfikowalne.
- Empiryczna weryfikacja nigdy nie daje pewności.

Problemy logiki i nauki

- Logika nie jest pewną podstawą dla poznania naukowego (Gödel)
- Metoda analityczna nie wystarcza.
  Quine: "Nauka jest uświadomionym zdrowym rozsądkiem".

  Płaskość i centralne położenie Ziemi nie są już zgodne ze zdrowym rozsądkiem!!!

- Nie istnieje absolutny punkt widzenia, Prawda (Quine: there is no first philosophy).

Paradoks Banacha-Tarskiego

- Ziarnko grochu może być podzielone na skończenie wiele części, z których (przez izometrie) można złożyć kulę wielkości Słońca.
- Brak sprzeczności – kawałki podziału są niemierzalne.
- Należy zauważyć, że podział fizycznego ziarnka grochu na niemierzalne części jest niemożliwy w świecie rzeczywistym.

Symbole i operatory

- $\rightarrow$ lub $\Rightarrow$ - operator implikacji
- , - operator koniunkcji
- v – operator alternatywy
- $\Leftrightarrow$ - operator równoważności
- ~ operator negacji
- Duża litera (np. A) - fakt

Tablice prawdy

A	~A
1	0
0	1

A	B	A , B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A	B	A v B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A	B	A -> B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

A	B	A ⇔ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Prawo wyłączonego środka

Prawo wyłączonego środka (łac. tertium non datur)

- Dla logiki dwuwartościowej, każde zdanie jest prawdziwe albo fałszywe:

$$p \vee \sim p$$

dla dowolnego zdania *p* prawdą jest zdanie *p* lub ~*p*

- Dla logiki wielowartościowej możliwe są również inne wartości

(np. logika Łukasiewicza)

Prawa logiki

p – zdanie logiczne:

- **prawo tożsamości** (każde zdanie implikuje siebie)

$$p \Rightarrow p$$

- **prawo podwójnego przeczenia** (dowolne zdanie równoważne jest podwójnej negacji tego zdania)

$$p \Leftrightarrow \neg\neg p$$

- **prawo przemienności koniunkcji**

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$$

- **prawo przemienności alternatywy**

$$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$$

Prawa logiki

- **prawo łączności koniunkcji**

$$[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$$

- **prawo łączności alternatywy**

$$[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$$

- **prawo idempotentności koniunkcji**

$$p \Leftrightarrow (p \wedge p)$$

- **prawo idempotentności alternatywy**

$$p \Leftrightarrow (p \vee p)$$

- **prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy**

$$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$

Prawa logiki

- **prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji**

$$[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

- **prawo wyłączonego środka** (z dwóch zdań: zdania lub jego zaprzeczenia jedno zawsze jest prawdziwe)

$$p \vee \neg p$$

- prawo to jest odpowiednikiem reguły *tertium non datur* (łac. trzeciej możliwości nie ma) **prawo** (nie może być jednocześnie prawdziwe zdanie i jego zaprzeczenie)

$$\neg(p \wedge \neg p)$$

Prawa logiki

- **prawa pochłaniania**

$$p \Rightarrow (p \vee q)$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow p$$

inna postać

$$[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$$

$$[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$$

- **pierwsze prawo De Morgana** (prawo zaprzeczenia koniunkcji)

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

- **drugie prawo De Morgana** (prawo zaprzeczenia alternatywy)

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

Prawa logiki

- **prawo Claviusa** (jeżeli zdanie wynika ze swojego zaprzeczenia, to jest prawdziwe)

$$(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$$

- **prawo Dunsa Szkota** (jeżeli zdanie jest fałszywe, to wynika z niego każde inne zdanie)

$$\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

- **prawo symplifikacji** (jeżeli zdanie jest prawdziwe, to wynika ono z każdego innego)

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

Prawa logiki

- **prawo sylogizmu, prawo przechodności implikacji** (jeżeli z jednego zdania wynika drugie i z drugiego trzecie, to z pierwszego wynika trzecie)

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Metody wnioskowania

- **Modus ponendo ponens** (łac. sposób potwierdzający przez potwierdzenie). Tautologia rachunku zdań mówi, że jeśli uznajemy prawdziwość poprzednika prawdziwej implikacji, to musimy uznać też prawdziwość jej następnika:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

- Przykład

  Jeżeli prawdą jest że pada deszcz i jednocześnie gdyby padał deszcz to byłoby wilgotno, więc jest wilgotno

Metody wnioskowania

- **Modus tollens -** Modus tollens (modus tollendo tollens, łac. sposób zaprzeczający przy pomocy zaprzeczenia) – wnioskowanie logiczne, reguła logiki mówiąca, że jeśli zaakceptujemy, że z X wynika Y oraz że Y jest fałszywe, to musimy zaakceptować też fałszywość X.

$$[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$$

- Przykład:

  Jeżeli prawdą jest że nie jest wilgotno, i jednocześnie gdyby padał deszcz to byłoby wilgotno, więc nie pada deszcz.

Metody wnioskowania

- **Modus tollendo ponens** (łac. sposób potwierdzający przez zaprzeczenie) - wnioskowanie logiczne, reguła logiki mówiąca, że jeśli uznajemy alternatywę i fałszywość jednego z jej członów, musimy uznać prawdziwość drugiego członu:

$$[(p \vee q) \wedge \neg p] \implies q$$

- Przykład:

Jeżeli prawda jest że nie pada deszcz i wiedząc, że pada deszcz lub świeci słońce, więc musi świecić słońce

Dysjunkcja (NAND)

- Dysjunkcja - zaprzeczenie koniunkcji dwóch zdań
- Symbol: / np. A/B

A	B	A / B
1	1	**0**
1	0	**1**
0	1	**1**
0	0	**1**

Metody wnioskowania

- **Modus ponendo tollens –** wnioskowanie logiczne, reguła logiki mówiąca, że na podstawie prawdziwości jednego ze zdań składowych prawdziwej dysjunkcji można orzekać o fałszywości drugiego.

$$[(p/q) \wedge p] \Rightarrow \neg q$$

- Przykład

  Jeżeli prawdą jest że pada deszcz i wiedząc, że nie może jednocześnie padać deszcz i być susza więc nie ma suszy

Zadania

Sprawdź poniższe tałtologie

- $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$
- $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$
- $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
- $((p \vee q) \wedge p) \Rightarrow q$