# Zbiory rozmyte

## logika rozmyta

# Logika rozmyta i reguły rozmyte

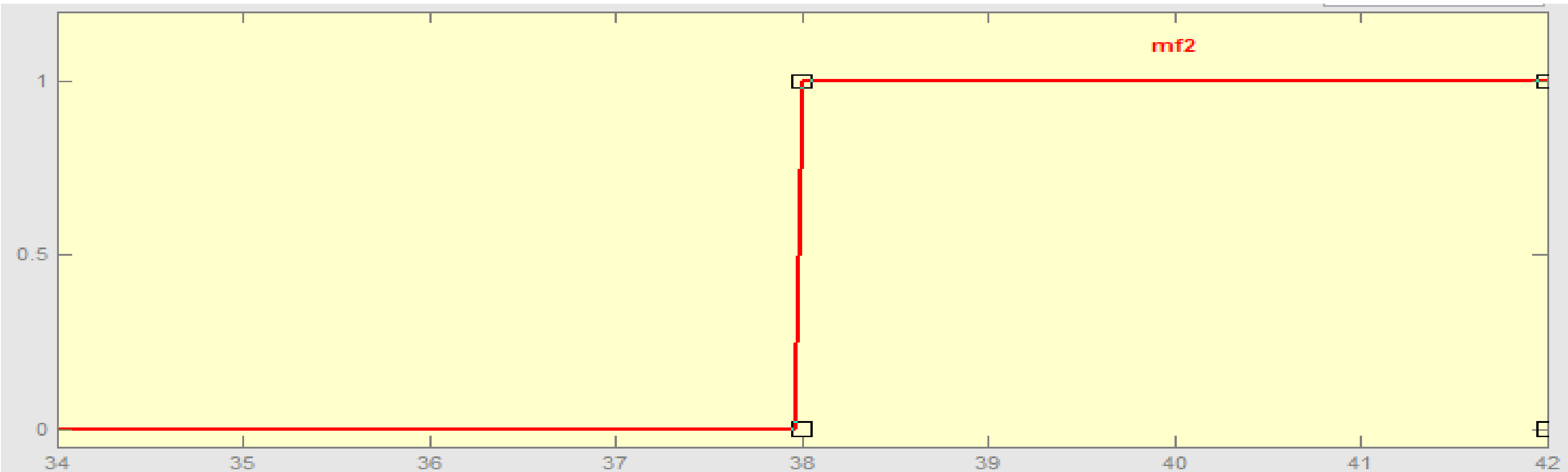
- Informacja którą przetwarzają ludzie często (zawsze) jest nieprecyzyjna, a mimo to potrafimy poprawnie wnioskować!
- Np. Jeśli przeszkoda jest *blisko* to przyhamuj

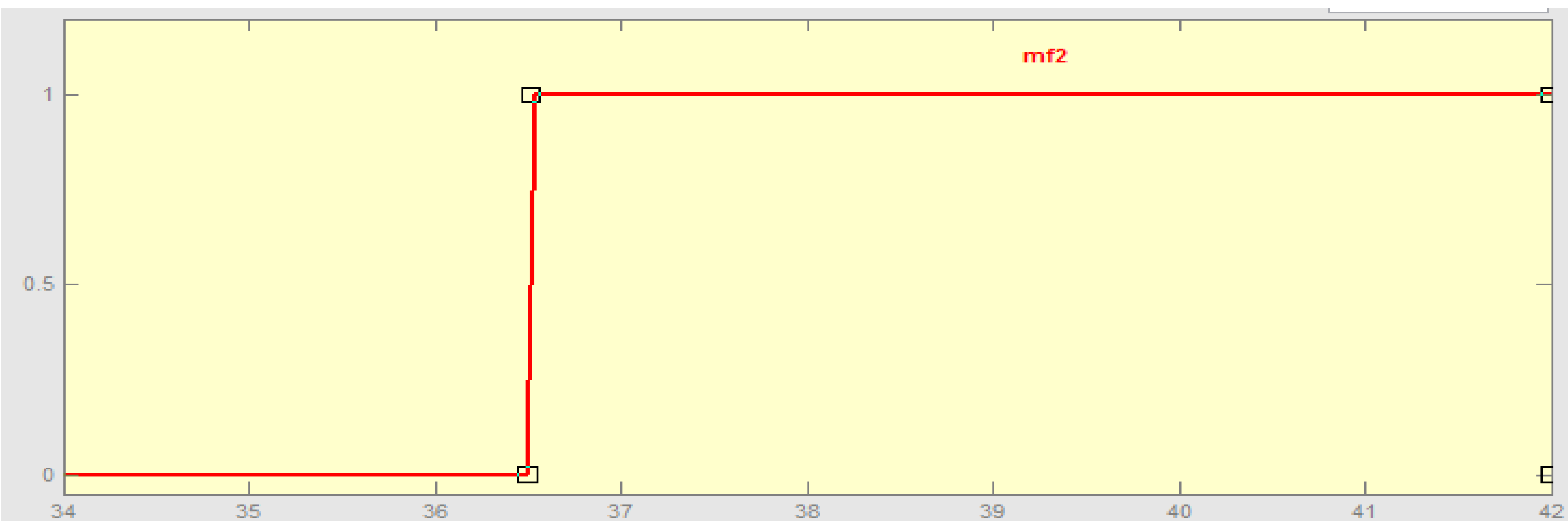
- Co to znaczy „blisko”, jaką to ma wartość?
- Co to znaczy „przyhamuj” jak bardzo mam nacisnąć na hamulec?

- „Gdzie kucharek sześć tam nie ma co jeść” - Ilu ekspertów tyle pomysłów na rozwiązanie problemu

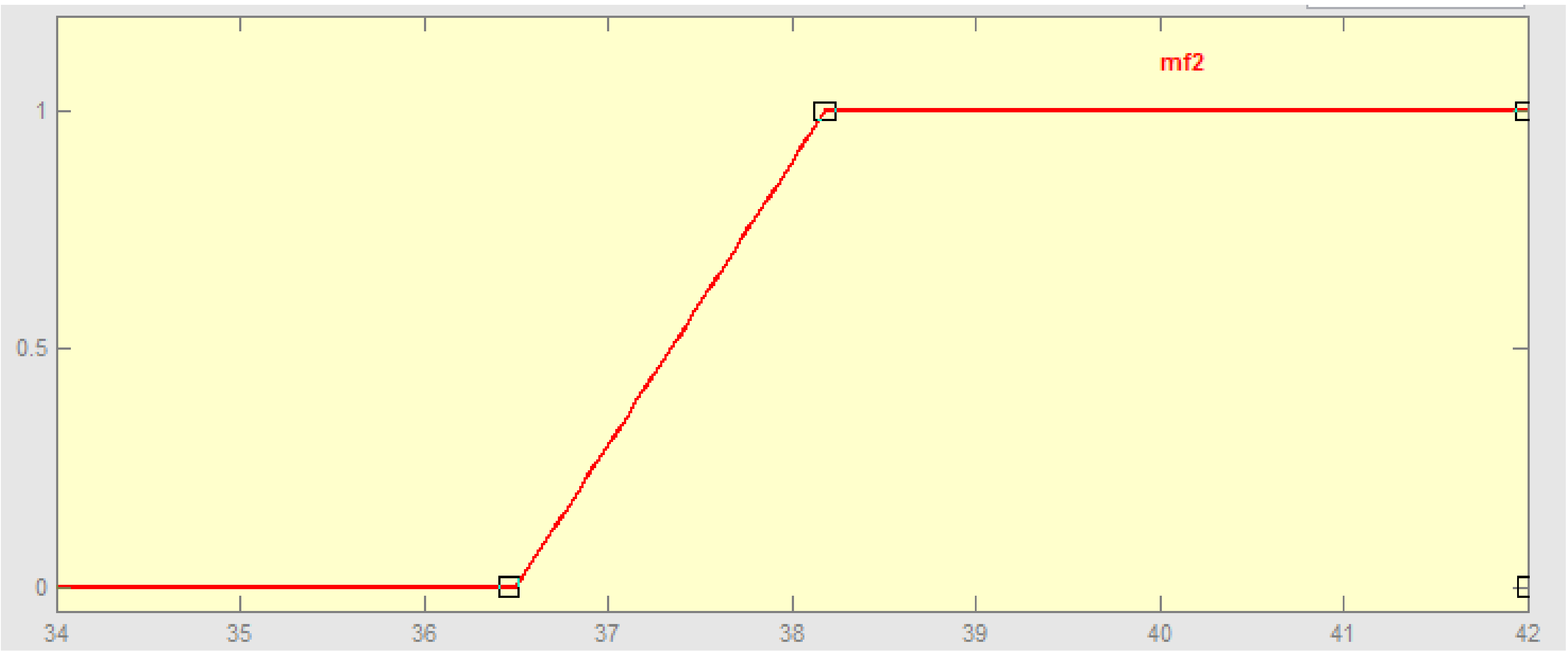
- Rozwiązanie „Fuzzy Set Theory” L. Zadeh (1965)

# Przykład.
## Przy jakiej temperaturze mamy gorączkę?



# Reguła rozmyta



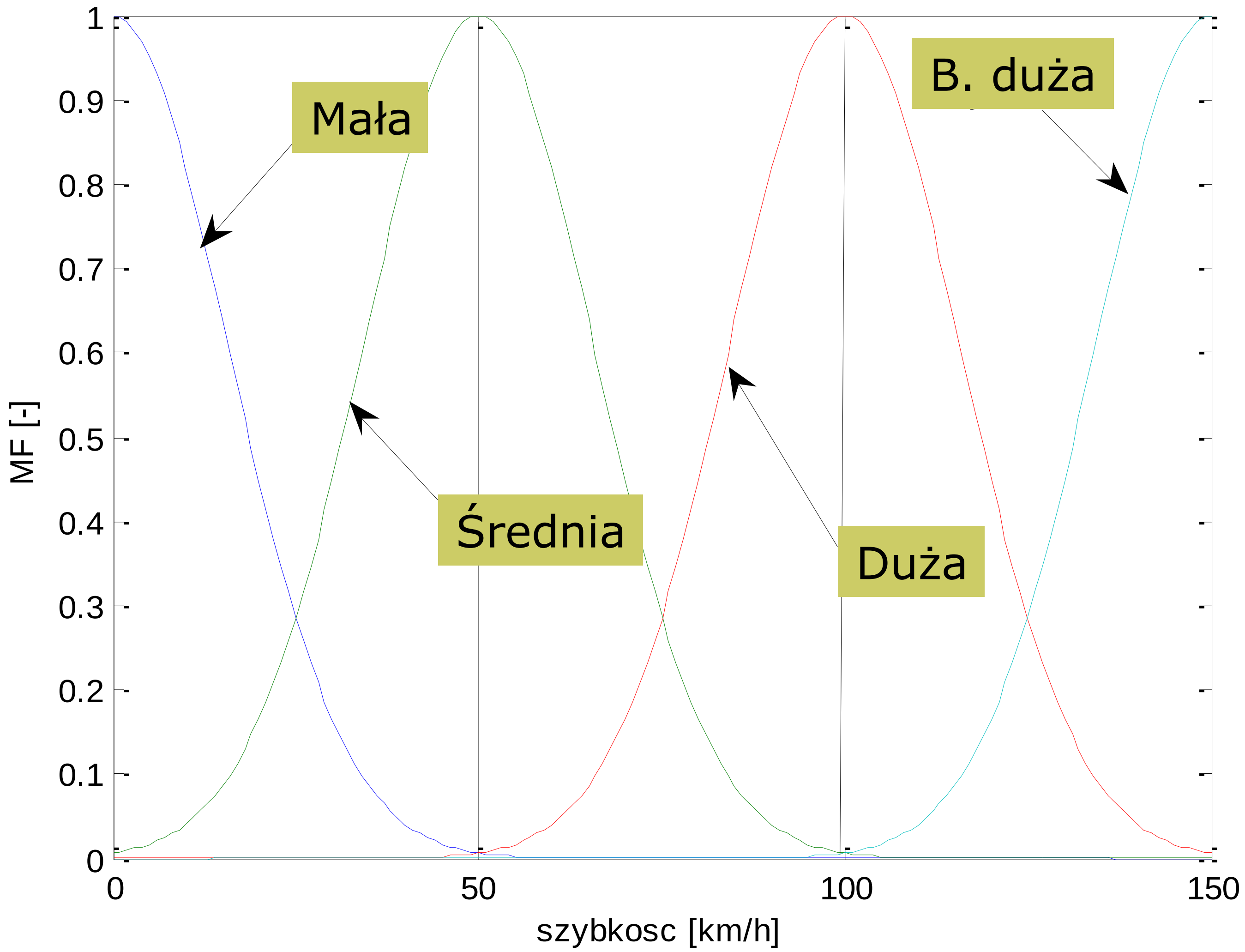
# Podstawy + historia

- 1965 rok prof. **Lotofil Zadeh** publikuje „Fuzzy sets"
- Zbiory rozmyte próbują **naśladować sposób rozumienia i postrzegania ludzi** np. jechać szybko, duże drzewo (informacja nieprecyzyjna) – problemy w implementacji w maszynach cyfrowych
- Rozwiązanie - wprowadzenie funkcji opisującej **stopień przynależności elementu do zbioru** (tradycyjny rachunek zbiorów zakłada dwuwartościowy stopień przynależności: 0-nie należy; 1-przynależy do zbioru)
- Główne zastosowanie: sterowanie, wnioskowanie oraz systemy wspomagające podejmowanie decyzji
- Rozwinięcie teorii zbiorów rozmytych -> logika rozmyta – rozwinięcie logiki ($L_N$) Łukasiewicza

# Podstawowe pojęcia

- **Zmienna lingwistyczna** – wielkość wejściowa, wyjściowa, zmienna stanu. Nazwa zmiennej przyjmująca wartości lingwistyczne. Przykłady: „prędkość”, „ciśnienie”, „wiek”
- **Wartość lingwistyczna** – jest to słowny opis wartości jakie przyjmuje zmienna lingwistyczna. Przykład: „szybko”, „wolno”,„duże”, „małe”, „stary”, „młody”
- **Przestrzeń numeryczna zmiennej** – zbiór wartości numerycznych, jaki może przyjąć dana zmienna lingwistyczna
- **Funkcja przynależności** – funkcja opisująca parametr, stopień w jakim dany punkt należy do danego zbioru

# Wartość lingwistyczna, przestrzeń numeryczna zmiennej i funkcja przynależności



# Definicje

**Zbiór rozmyty** – zbiór ***A*** w niepustej przestrzeni **X** definiowany przez pary:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in \mathbb{X}\}$$

Gdzie $\mu_A$ – funkcja przynależności definiowana jako: $\mu_A : \mathbb{X} \to [0,1]$

Funkcja przynależności przyporządkowuje każdemu elementowi ze zbioru *A* wartość z przedziału [0,1], określającą stopień przynależności tego elementu do zbioru *A*. W odróżnieniu od klasycznego podejścia do teorii zbiorów, gdzie mówiliśmy o funkcji opisującej przyjmującej dwie wartości {0,1}, w zbiorach rozmytych wyróżniamy trzy przypadki:

$\boldsymbol{\mu_A(x)=1}$ – pełna przynależność do zbioru rozmytego A,

$\boldsymbol{\mu_A(x)=0}$ – brak przynależności elementu *x* do zbioru rozmytego A,

$\boldsymbol{0<\mu_A(x)<1}$ – częściowa przynależność elementu *x* do zbioru rozmytego A

# Metody zapisu

Zbiór *A* w przestrzeni X o skończonej liczbie *n* elementów *x* przedstawia się następująco:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

przy czym znak Σ oznacza sumę mnogościową, a operator dzielenia należy traktować jako przyporządkowanie elementowi *xi* odpowiadającej mu wartości funkcji przynależności

W przestrzeni o nieskończonej liczbie elementów powyższy zapis przyjmuje postać:

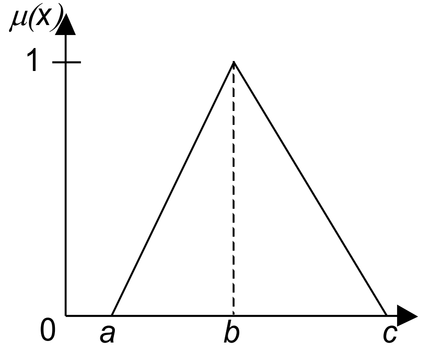
$$A = \int_{\mathbb{X}} \frac{\mu_A}{x}$$

Inną często spotykaną formą zapisu zbioru rozmytego jest zapis skrócony

$$A = \{\mu_A(x)/x : x \in \mathbb{X}\}$$

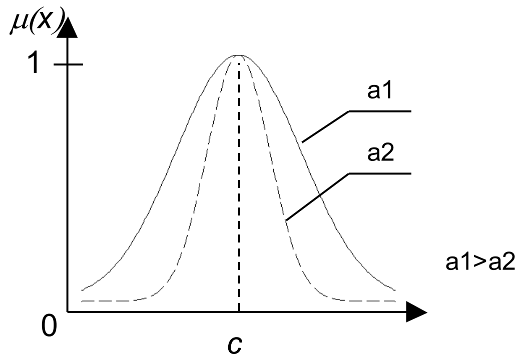
# Podstawowe zbiory przynależności

- dowolny kształt
- trójkątna funkcja przynależności:



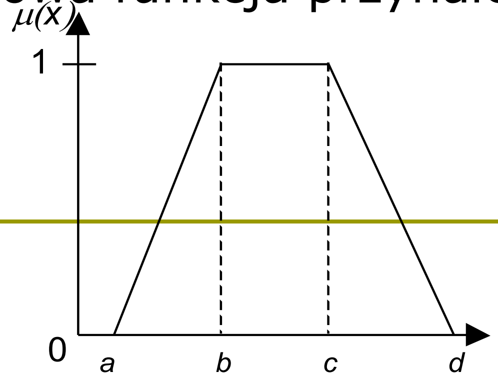

$$\mu_A(x;s,b,c)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b\\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b<x\le c\\ 0, & c<x\end{cases}$$

- Gaussowska funkcja przynależności:



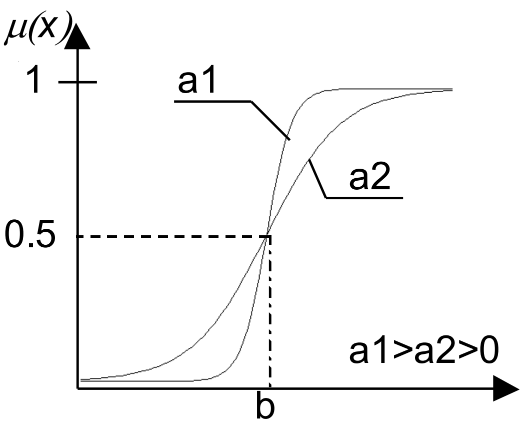

$$\mu_A(x;c,a)=\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{a}\right)^2\right)$$

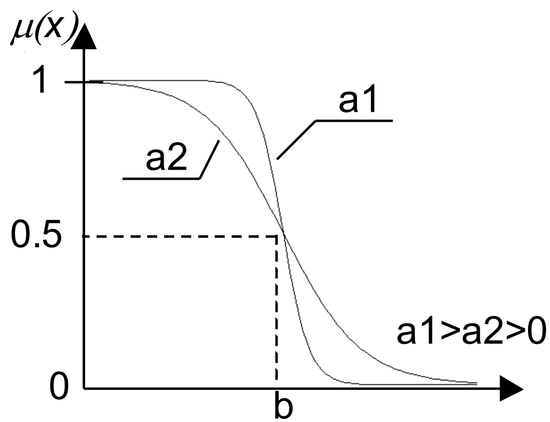
- trapezowa funkcja przynależności:




$$\mu_A(x;a,b,c,d)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b\\ 1, & b<x\le c\\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c<x\le d\\ 0, & d<x\end{cases}$$

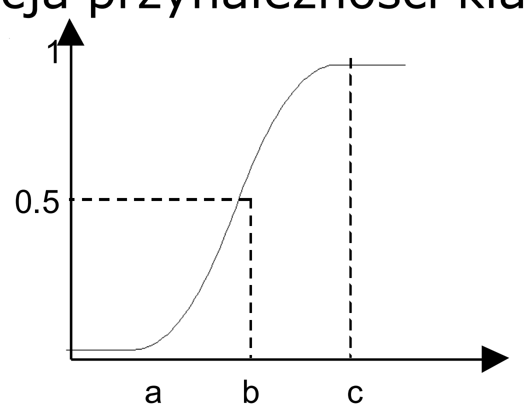
- sigmoidalna funkcja przynależności:



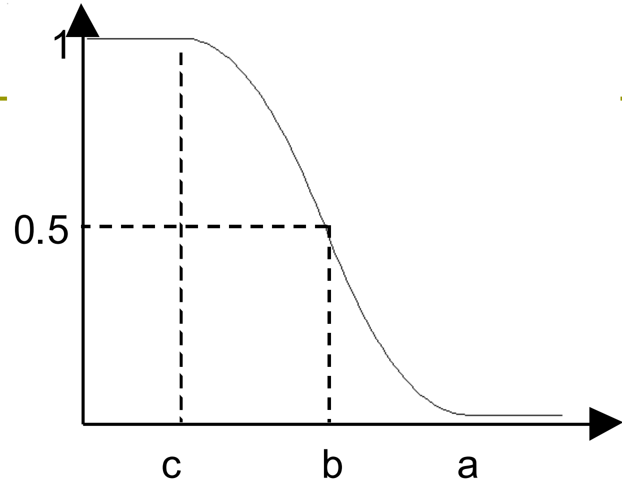

$$\mu_A(x;a,b)=\frac{1}{1+\exp(-a(x-b))}$$

- funkcja przynależności klasy S:



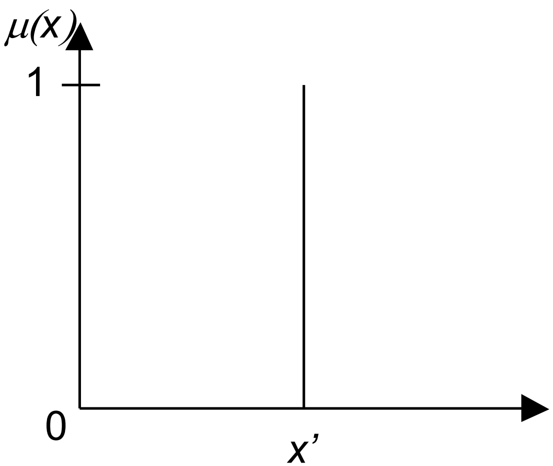

$$\mu_A(x;a,b,c)=\begin{cases}0, & x\ge c\\ 1-2\left(\dfrac{x-c}{c-a}\right)^2, & c>x\ge b\\ 2\left(\dfrac{x-a}{c-a}\right)^2, & b>x\ge a\\ 1, & x<a\end{cases};\quad gdzie\quad b=\frac{a+c}{2}$$

- funkcja przynależności klasy Z:




$$\mu_A(x;a,b,c)=\begin{cases}0, & x\geq a\\ 2\left(\dfrac{x-a}{c-a}\right)^2, & a>x\geq b\\ 1-2\left(\dfrac{x-c}{c-a}\right)^2, & b>x\geq c\\ 1, & x<c\end{cases};\quad gdzie\quad b=\frac{a+c}{2}$$

- Singleton (wartość ostra):




$$\mu_A(x;x')=\begin{cases}1, & x=x'\\ 0, & x\neq x'\end{cases}$$

# Pojęcia c.d.

- **Nośnik zbioru** –jest to zbiór elementów przestrzeni *X*, dla których funkcja przynależności przyjmuje wartości dodatnie.

$$\operatorname{supp} A = \left\{ x \in \mathbb{X} : \mu_A(x) > 0 \right\}$$

- **Wysokość zbioru** – definiowana jako maksymalna wartość funkcji $\mu_A(x)$

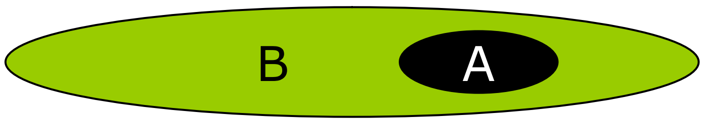
$$h(A) = \sup_{x \in A} \mu_A(x)$$

Jeśli *h(A)=1*, mówimy wówczas o zbiorze normalnym - w przeciwnym przypadku zbiór rozmyty możemy poddać normalizacji w postaci: $\frac{\mu_A(x)}{h(A)}$

- **Zbiór pusty** – to taki zbiór dla którego $\forall_{x \in \mathbb{X}} \mu_A(x) = 0$
- **Równość zbiorów rozmytych** – Zbiór rozmyty A równy jest zbiorowi rozmytemu *B*, *A=B* gdy spełniona jest zależność

$$\forall_{x \in \mathbb{X}} \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

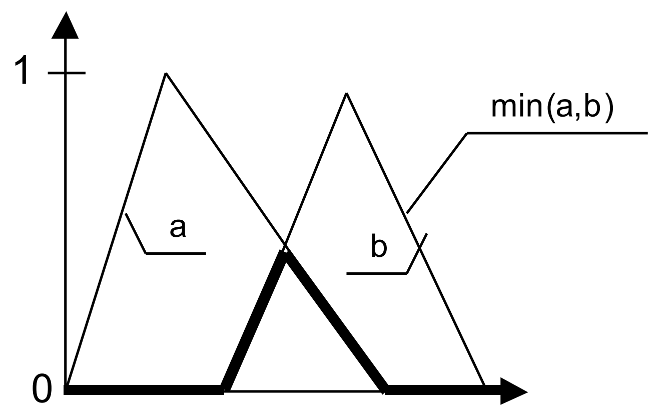
- **Zawieranie się zbiorów rozmytych** – Zbiór rozmyty *A* zawiera się w zbiorze rozmytym B, A⊂B gdy




$$\underset{x\in\mathbb{X}}{\forall}\ \mu_{A(x)} \le \mu_B(x)$$

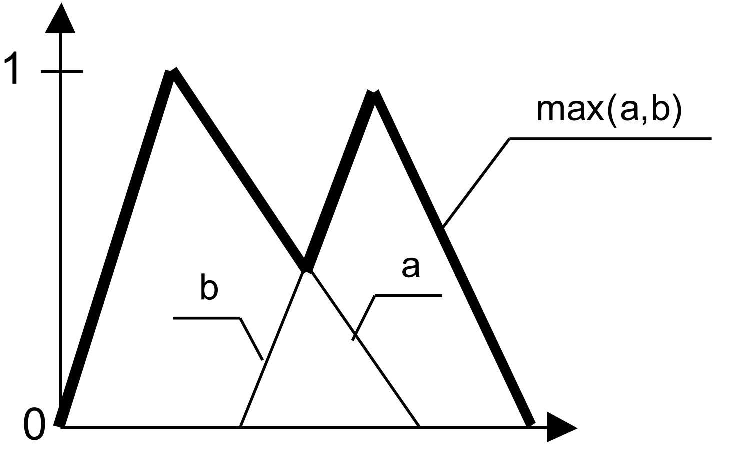
- **Przecięcie zbiorów rozmytych** – W literaturze istnieje wiele definicji przecięcia (iloczynu) zbiorów rozmytych. Noszą one wspólną nazwę T-norm. Iloczyn logiczny zbiorów rozmytych oznacza się $A *_T B$. Najprostszą i najczęściej stosowaną definicją przecięcia zbiorów $A$ *i* $B \subseteq X$ jest:

$$\underset{x\in\mathbb{X}}{\forall}\ \mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big)$$



- **Suma zbiorów rozmytych** – Podobnie jak iloczyn tak i suma zbiorów rozmytych (S-norma) $A$ i $B \subseteq X$ została zdefiniowana na różne sposoby. Sumę zbiorów rozmytych oznaczamy jako $A *_S B$, najprostszym jej przedstawicielem jest operacja maksimum:

$$\underset{x \in \mathbb{X}}{\forall} \mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right)$$



# T – normy

T-norma powinna spełniać warunki:

1. T(x,1)=x; T(x,0)=0 (Tożsamość jedynki, zerowanie)
2. T(x,y)=T(y,x) (Przemienność)
3. x≤u ➔ T(x,y)≤T(u,y) (monotoniczność)
   y≤r ➔ T(x,y) ≤T(x,r)
4. T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z) (Łączność)

Przykłady najczęściej stosowanych T-norm:

Zadeha: min(x,y)

Algebraiczna: x*y

Łukasiewicza: max(x+y-1,0)

Fodora: $$\begin{cases} \min(x,y), & x+y>1 \\ 0, & x+y\le 1 \end{cases}$$

Drastyczna: $$\begin{cases} \min(x,y), & \max(x,y)=1 \\ 0, & \max(x,y)\ne 1 \end{cases}$$

Einstaina: $$\frac{x\cdot y}{2-(x+y-x\cdot y)}$$

# S - normy

T-norma powinna spełniać warunki:

1. S(x,1)=1; S(x,0)=x
2. S(x,y)=S(y,x)
3. x≤u ➔ S(x,y)≤S(u,y)
   y≤r ➔ S(x,y) ≤S(x,r)
4. S(x,S(y,z))=S(S(x,y),z)

Przykłady najczęściej stosowanych S-norm:

Zadeha: max(x,y)

Algebraiczna: x+y-x*y

Łukasiewicza: min(x+y,1)

Fodora: $\begin{cases} \max(x,y), & x+y<1 \\ 1, & x+y\geq 1 \end{cases}$

Drastyczna: $\begin{cases} \max(x,y), & \min(x,y)=0 \\ 1, & \min(x,y)\neq 0 \end{cases}$

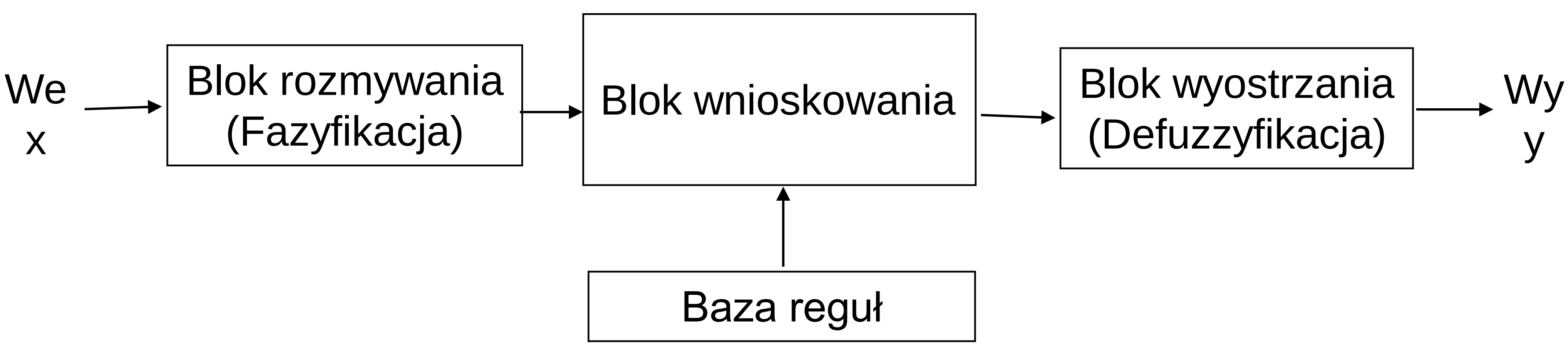
Einstaina $\dfrac{x+y}{1+x\cdot y}$

# Wnioskowanie i reguły rozmyte

# Systemy rozmyte

„Czysty" system rozmyty:


System rozmyty z blokami rozmywania i wyostrzania



# Reguła rozmyta

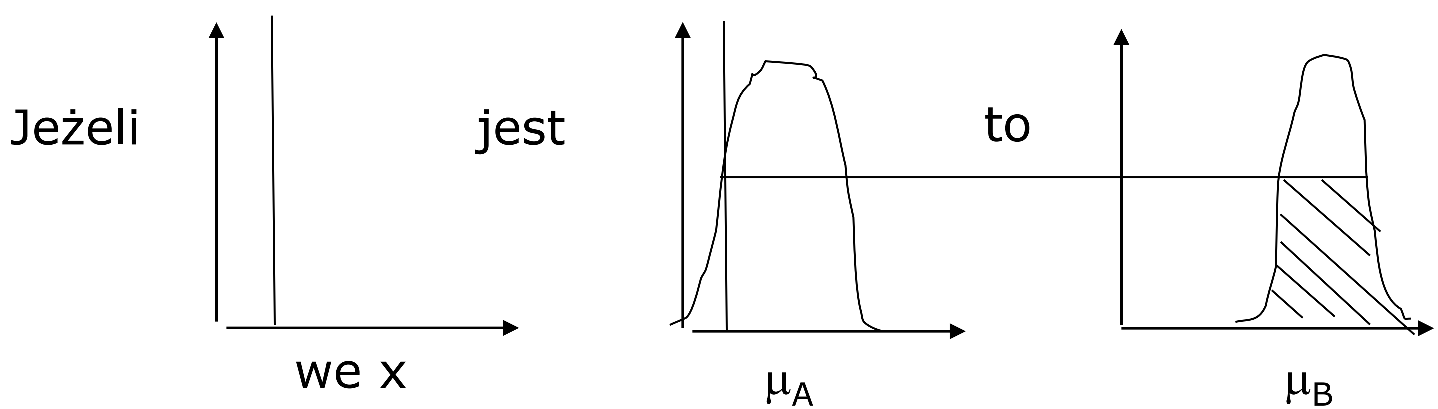
Jeżeli „X jest A” to „Y jest B”

Jeżeli zmienna lingwistyczna X przyjmuje wartość lingwistyczna A to zmienna lingwistyczna Y przyjmuje wartość B

Np. Jeżeli szybkość jest duża to opór jest duży.

**Implikacja rozmyta** -> min($\mu_A$, $\mu_B$)

jeżeli x jest



# Metody wnioskowania

- Reguła odrywania (modus ponendo ponens)

Modus – sposób

Pono – twierdzenie (wnioskowanie stwierdzające przez stwierdzenie)

Ponens – stwierdzenie

Jeżeli prawdziwe jest zdanie p i implikacja p ➔ q to prawdziwe jest zdanie q

$$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$$

- Wnioskowanie stwierdzające przez zaprzeczenie (modus tollendo ponens)

Tollendo – usunąć

$\neg p$=nie p $[\neg p \wedge (\neg p \rightarrow q)] \rightarrow q$

- Wnioskowanie zaprzeczające przez stwierdzenie (modus ponendo tollens)

$$[p \wedge (p \rightarrow \neg q)] \rightarrow \neg q$$

- Modus tollendo tollens

Jeżeli prawdziwe sa zdania $\neg q$ i implikacja p ➔ q to prawdziwe jest zdanie $\neg p$

$$[\neg q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \neg p \qquad [\neg q \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)] \rightarrow \neg p$$

- Zasada rozkładu

$$\begin{array}{c} \neg p \rightarrow q \\ p \rightarrow r \\ \hline \neg r \rightarrow q \text{ lub } \neg q \rightarrow r \end{array}$$

# Implikacje rozmyte

Jeżeli x jest A to y jest B

- Implikacja Mamdaniego:

$$u_{A->B}=u_A(x)\wedge u_B(y)=\min(u_A(x),\ u_B(y))$$

- Implikacja Larsena

$$u_{A->B}=u_A(x)u_B(y)$$

- Implikacja Lukasiewicza

$$u_{A->B}=\min(1,1-u_A(x)+u_B(y))$$

- Implikacja Kleene-Dienesa

$$u_{A->B}=\max(1-u_A(x),u_B(y))$$

- Implikacja Zadeha

$$u_{A->B}=\max(\min(u_A(x),u_B(y)),1-u_A(x))$$

- Implikacja probabilistyczna

$$u_{A->B}=\min(1,1-u_A(x)+u_A(x)u_B(y))$$

- Implikacja Goguena

$$u_{A->B}=\min(1,\ u_B(y)\ /\ u_A(x))$$

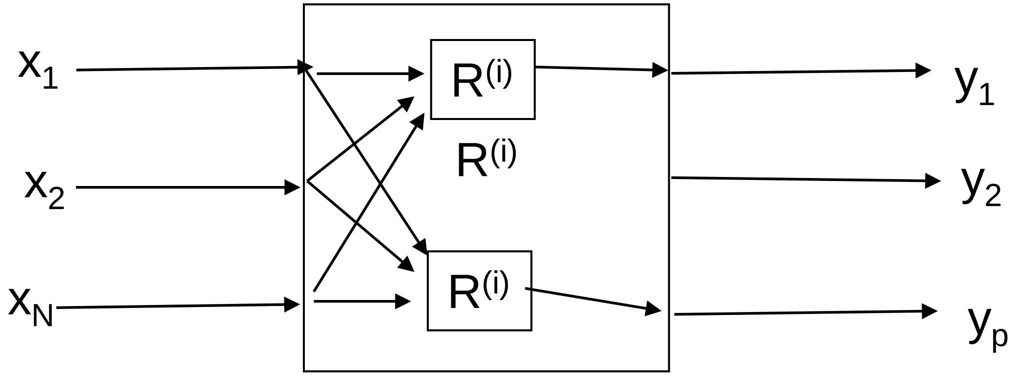
# Ogólna postać reguł jeżeli – to dla system MIMO

$R^1$: jeżeli ($x_1$ jest $A_1^1$) i ($x_2$ jest $A_2^1$) i … i ($x_3$ jest $A_n^1$) to

($y_1$ jest $B_1^1$) i ($y_2$ jest $B_2^1$) i…i ($y_m$ jest $B_p^1$)

$R^i$: jeżeli ($x_1$ jest $A_1^i$) i ($x_2$ jest $A_2^i$) i … i ($x_3$ jest $A_n^i$) to

($y_1$ jest $B_1^i$) i ($y_2$ jest $B_2^i$) i…i ($y_m$ jest $B_p^i$)



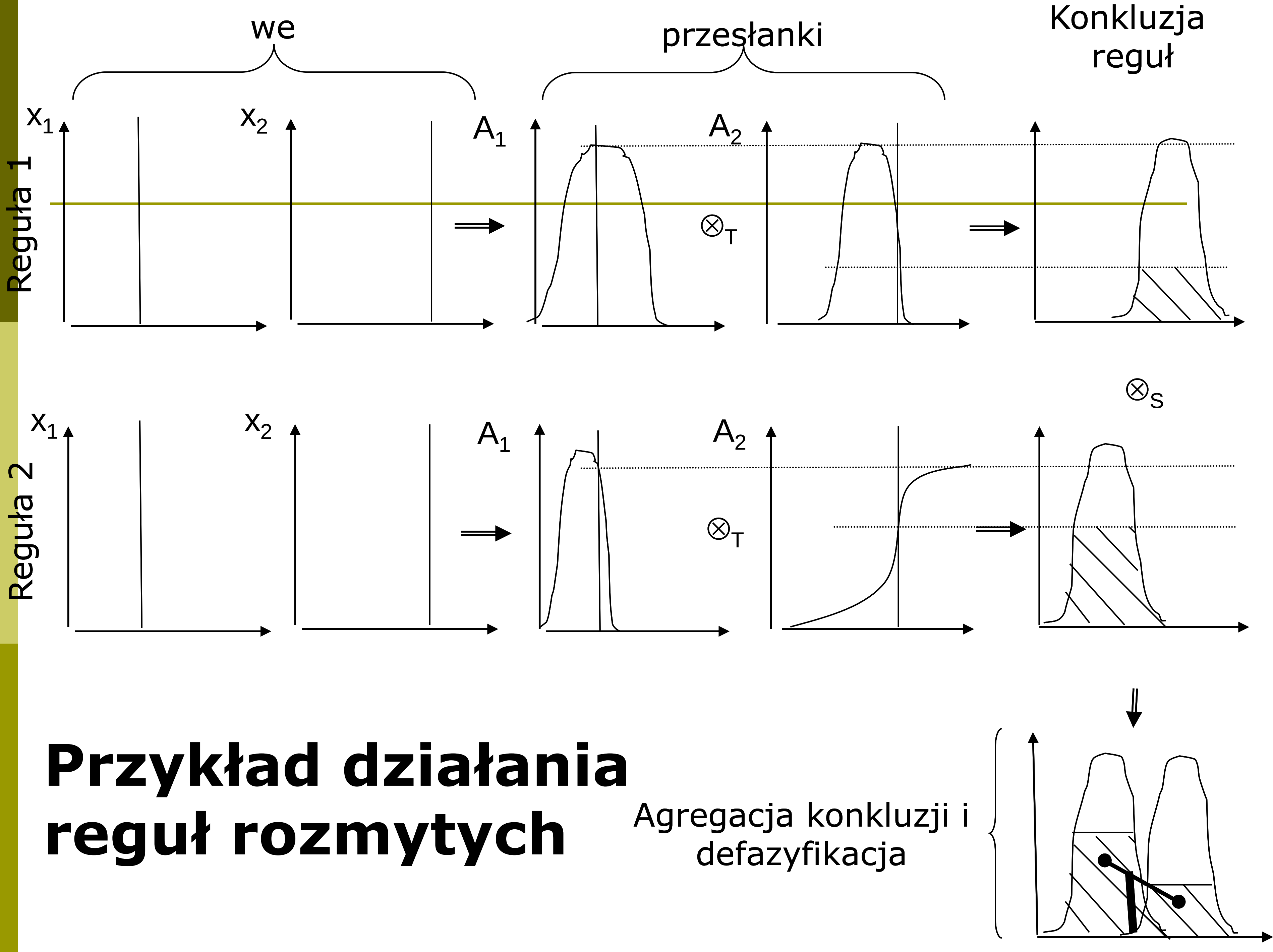
# Kanoniczna postać reguł

- Postać ogólna reguły z MISO

  R: jeżeli (($x_1$ jest $A_1^1$) i ($x_2$ jest $A_2^1$)) lub
  (($x_1$ jest $A_1^2$) i ($x_2$ jest $A_2^2$))
  to ($y_1$ jest $B_1$)

- Postać kanoniczna

  $R^1$: jeżeli ($x_1$ jest $A_1^1$) i ($x_2$ jest $A_2^1$)
  to ($y_1$ jest $B_1$)
  $R^2$: jeżeli ($x_1$ jest $A_1^2$) i ($x_2$ jest $A_2^2$)
  to ($y_1$ jest $B_1$)

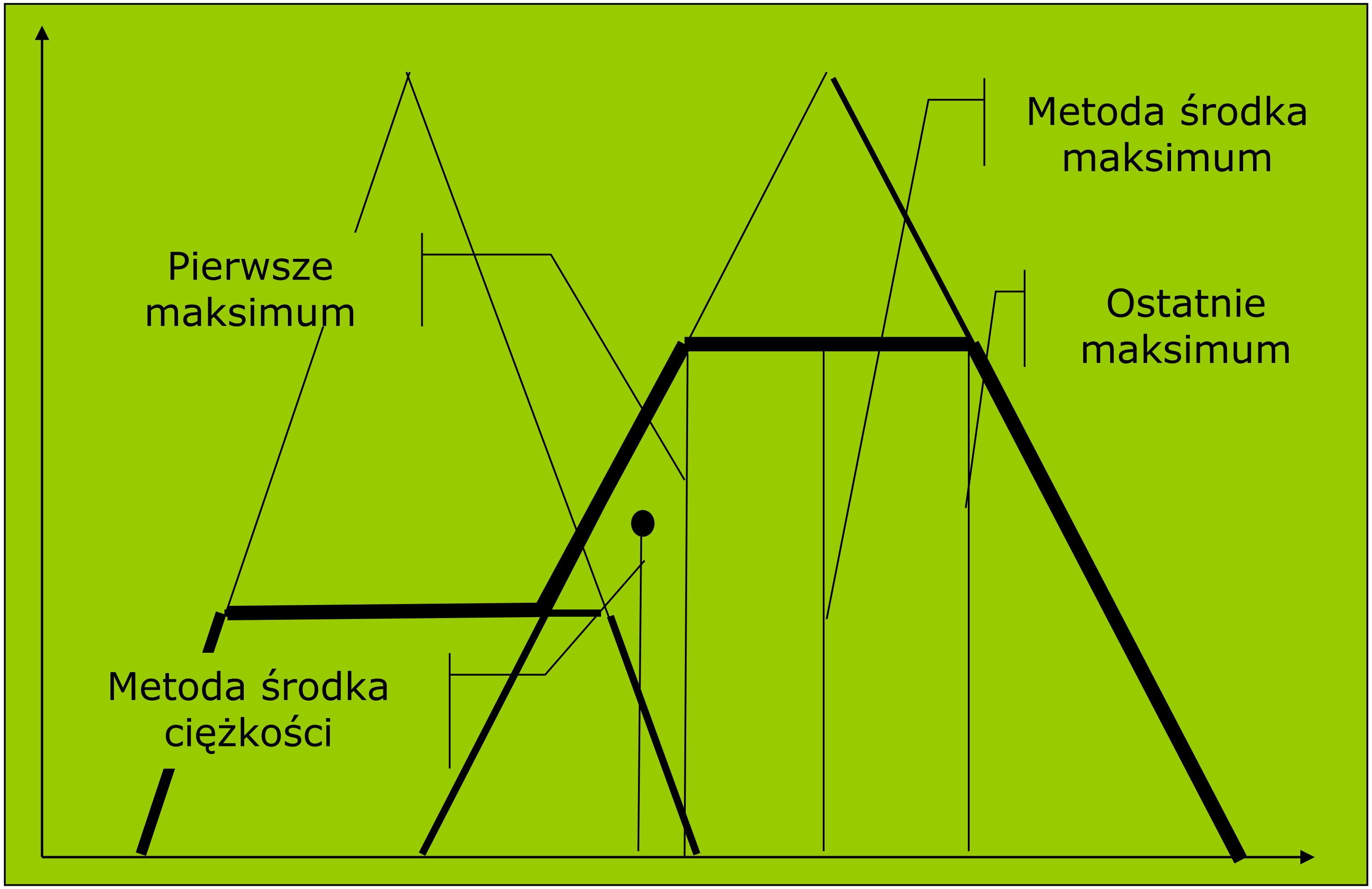



# Przykład działania reguł rozmytych

# Metody defazyfikacji

- metoda środków maksimum
- metoda pierwszego maksimum
- metoda ostatniego maksimum
- metoda środków ciężkości

$$y_C = \frac{\int y \cdot \mu_{wyn}(y) dy}{\int \mu_{wyn}(y) dy}$$


Metoda środka maksimum
Pierwsze maksimum
Ostatnie maksimum
Metoda środka ciężkości

# Modele rozmyte

# Rodzaje modeli rozmytych

- Model Mamdaniego

    JEŻELI (*x około A*) TO (*y około B*)

- Model Takagi-Sugeno

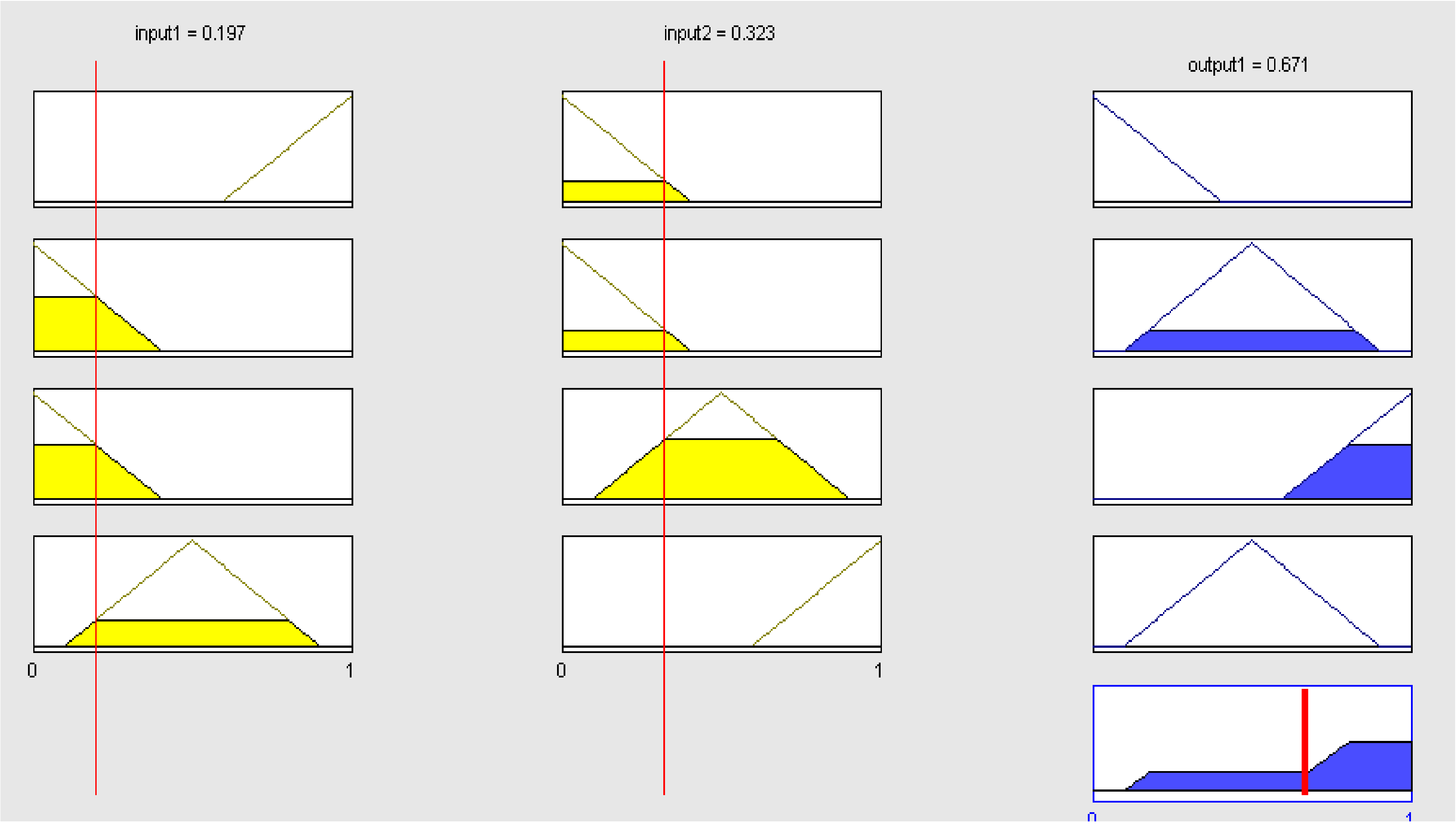
    JEŻELI (*x około A*) TO *y=f(x)*

- Modele relacyjne

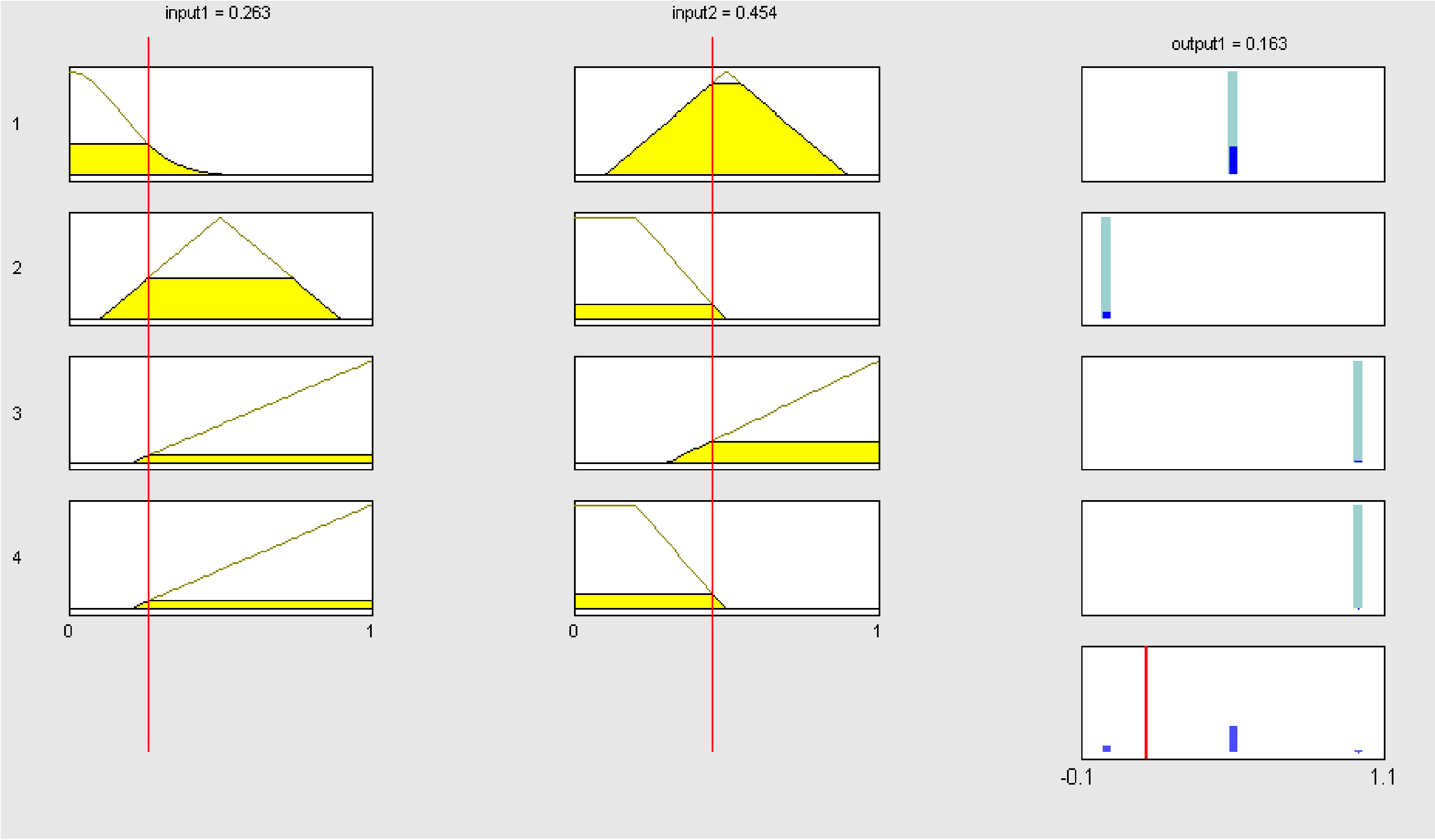
    wykorzystują rozmyty rachunek relacji

- inne

# Przykład modelu Mamdaniego



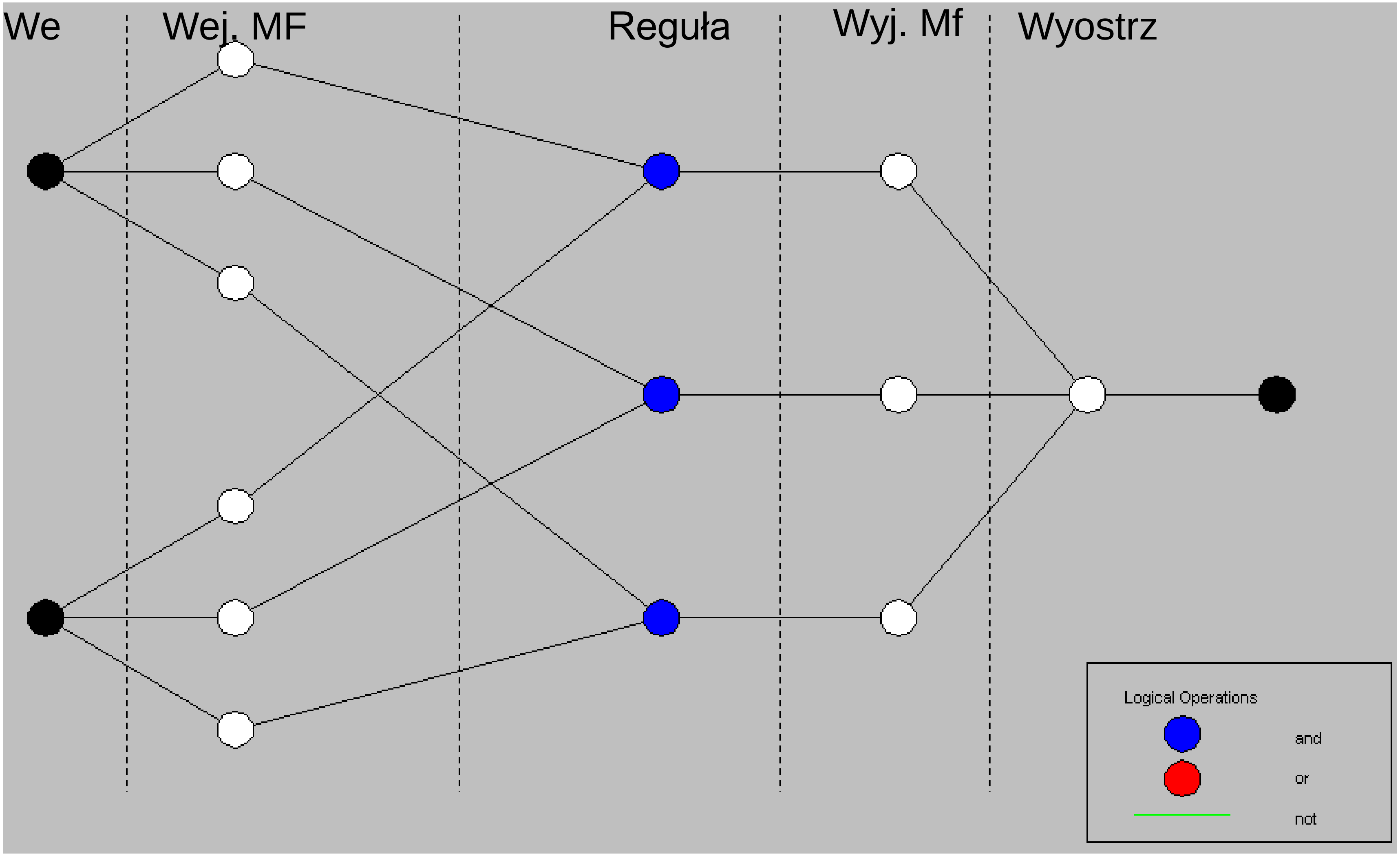
# Przykład modelu Takagi-Sugeno



# Uczenie modeli rozmytych

- Ręcznie korzystając z wiedzy eksperta
  
  Problem -> Transformacja wiedzy eksperta na odpowiednie funkcje przynależności
- Uczenie na podstawie danych
  - Systemy neurorozmyte -> transformacja (interpretacja) reguł systemu rozmytego do postaci neuronowej
    - Gradientowe metody uczenia (jak RBF)
    - Algorytmy genetyczne i ewolucyjne (dobór operatorów)
    - Uczenie w oparciu o algorytm samoorganizacji
    - Klasteryzację
    - Algorytm ARTMAP

# Struktura warstwowa systemy neurorozmyte



# Klasyfikatory Rozmyte

Brak spójnej interpretacji (L. Kunchewa)

- „A fuzzy classifier is any classifier which uses fuzzy sets either during its training or during its operation"
- „A fuzzy or possibilistic classifier, is any possibilistic classifier for which „

$$\sum_{i=1}^{c} \mu_i(x) = 1$$

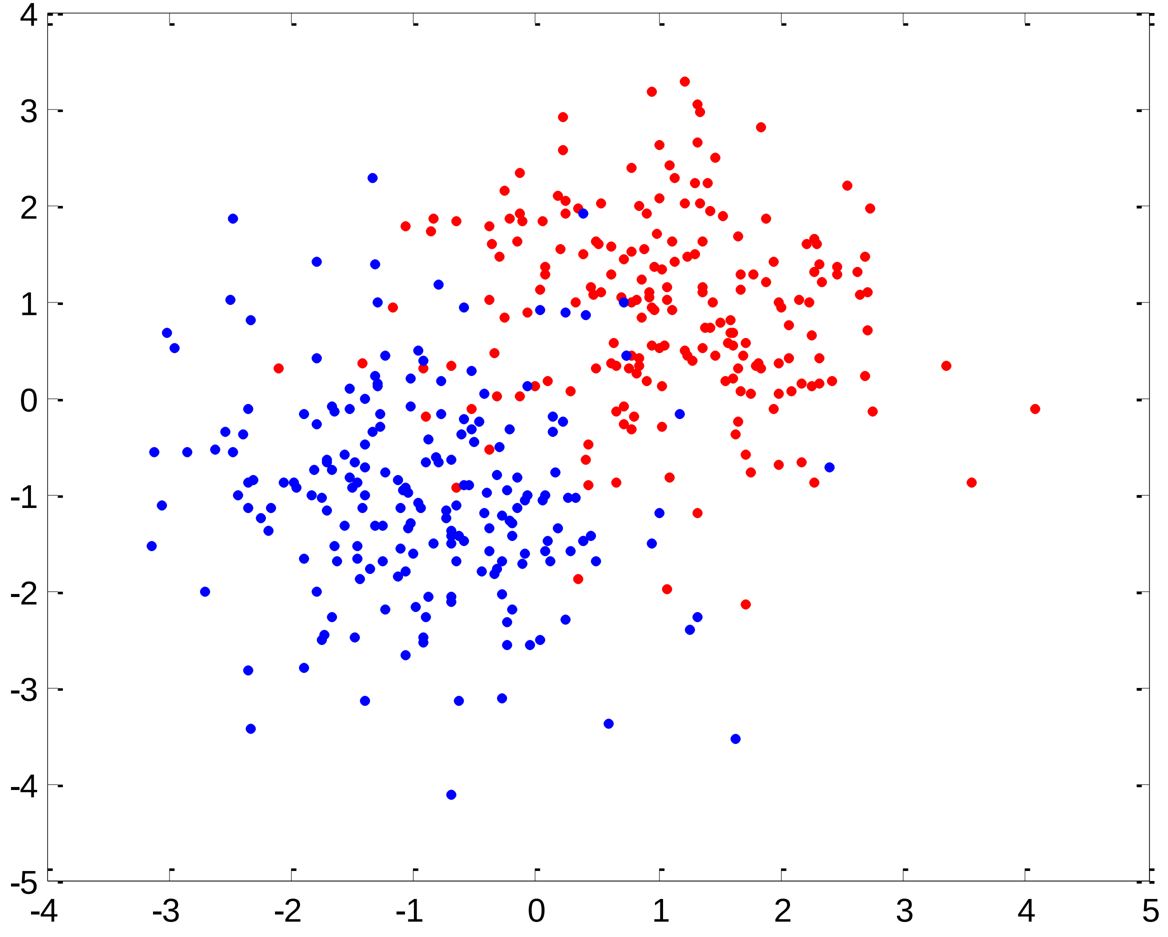
- „A fuzzy classifier is a fuzzy if-then inference system (a fuzzy rules based system) which yields a class label (crisp or soft) for x"

# Po co rozmywać?

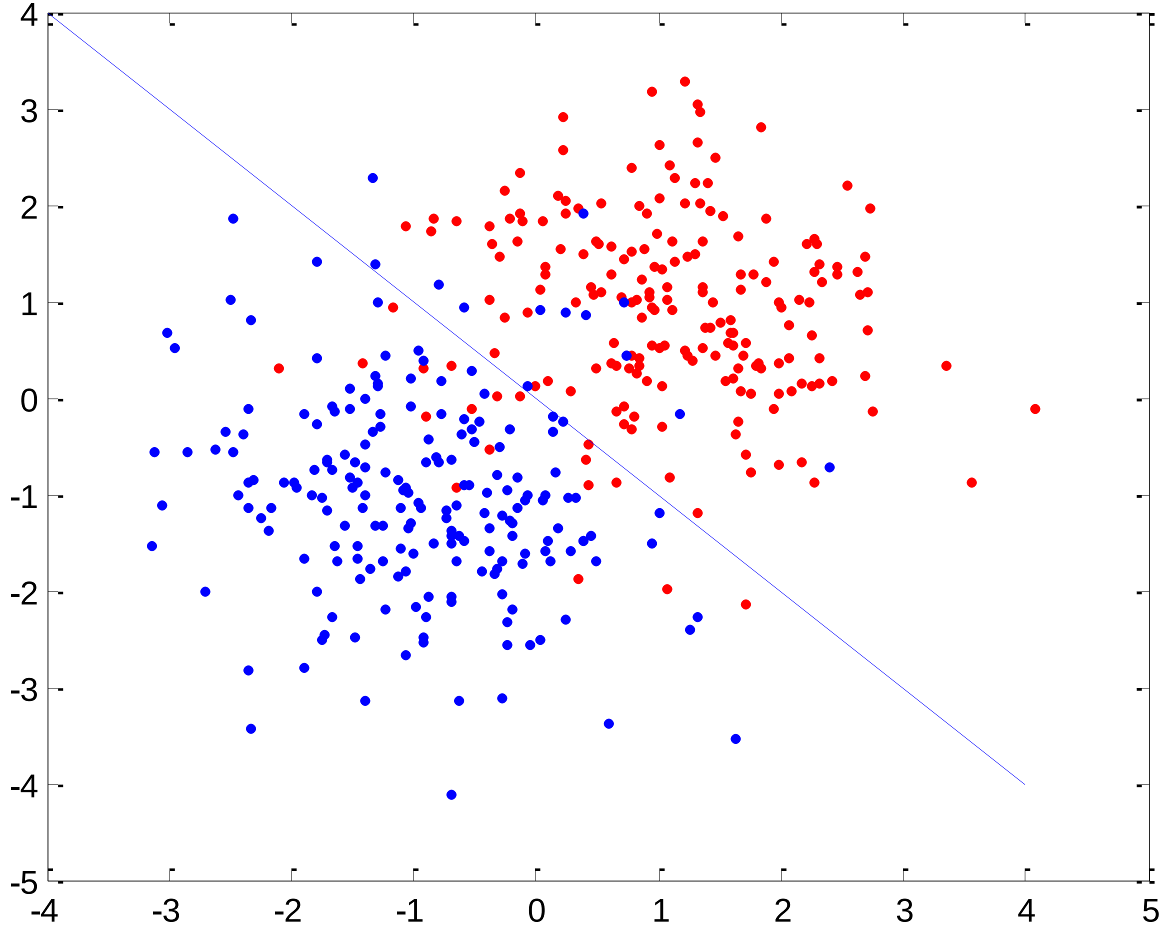
- Jedni wolą logikę (nawet rozmytą) inni rozkłady prawdopodobieństwa

- Sterowanie w warunkach niepewnych
- Analiza i przetwarzanie języka naturalnego
- Możliwość budowy reguł w oparciu o lingwistyczną wiedzę eksperta
- Większa elastyczność reguł rozmytych
- Niedokładność danych – zbiory rozmyte drugiego rzędu

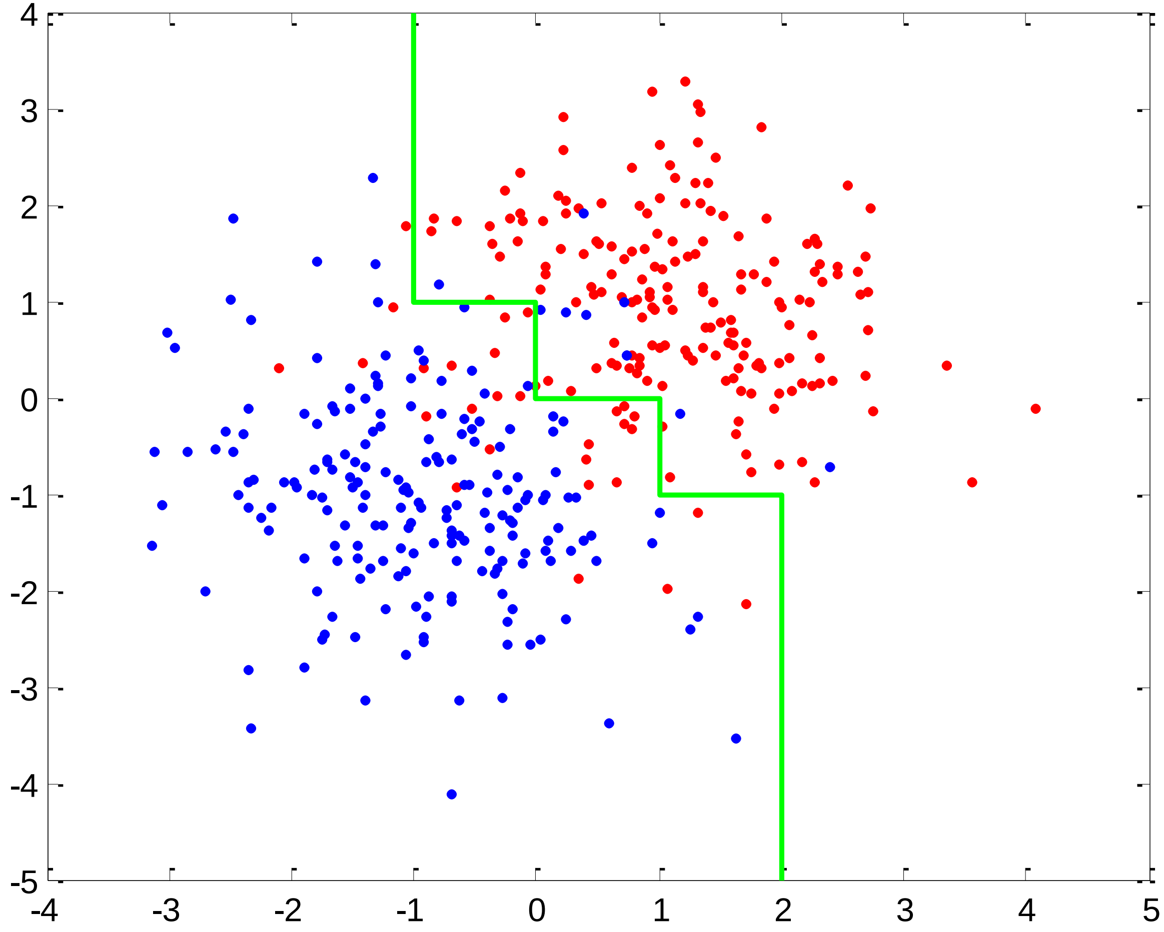
# Logika rozmyta czy klasyczna?



# Logika rozmyta czy klasyczna?

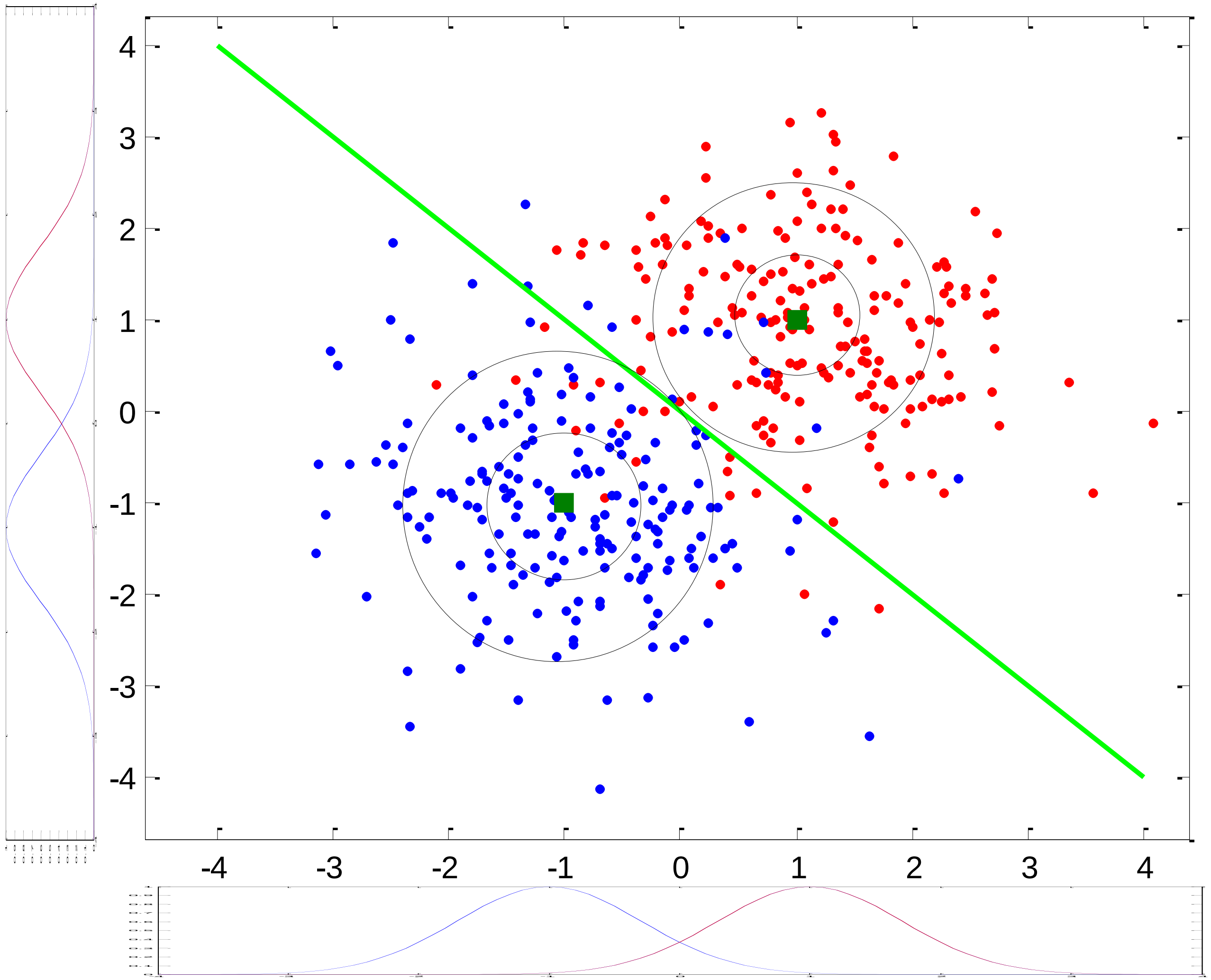


# Logika rozmyta czy klasyczna?




If x1<-1 then B
elseif x2>1 then R
elseif x1<0 then B
elseif x2>0 then R
elseif x1<1 then B
elseif x2>-1 then R
elseif x1<2 B
else R

# Przykład

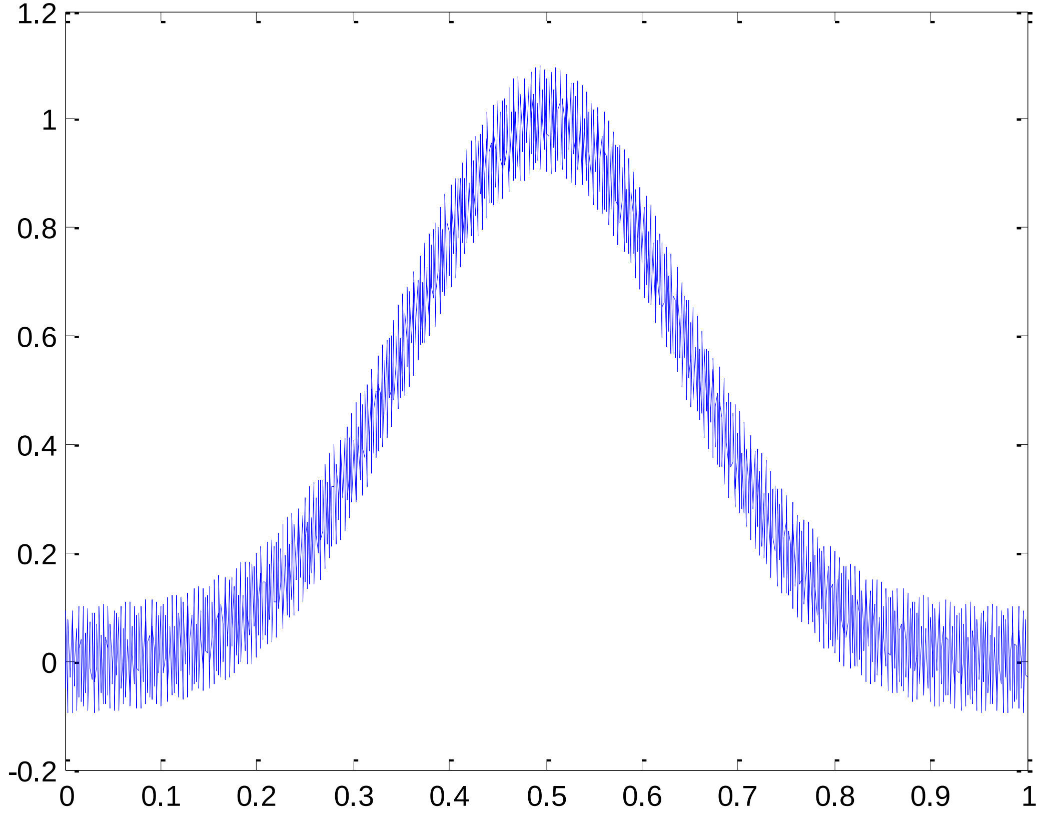



if (x1 około -1)
& (x2 około -1)
then raczej B

if (x1 około 1)
& (x2 około 1)
then raczej R

# Zbiory rozmyte II rodzaju

- Rozmywanie zbiorów rozmytych ☺



# Prezentacja - Matlab

# Literatura


1. Piegat A. Modelowanie i sterowanie rozmyte, AOW Exit, Warszawa 2003
2. Łachwa A. Rozmyty świat zbiorów, liczb, relacji, faktów, reguł i decyzji. AOW Exit, Warszawa 2001
3. Ossowski S. Sieci neuronowe w ujęciu algorytmicznym, WNT Warszawa 1996
4. Kuncheva L. Fuzzy Classifier Design, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Physica-Verlag, 2000
5. Nauck D., Klawonn F., Kruse  R. Foundations on Neuro-Fuzzy Systems. Wiley, Chichester, 1997.

# Pytania?